

Математический анализ (1 курс, ФТФ)

1. а. Задайте явной формулой биекцию между множествами $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и \mathbb{N} ;

б. Является ли множество прямоугольников на плоскости, вершины которых имеют целые координаты счётным?

в. Счётным или континуальным будет множество всех возрастающих последовательностей натуральных чисел?

2. Найдите и докажите по определению супремум и инфимум множества X .

а. $X = \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

б. $X = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}, m < 2n \right\}$

в. $X = \left\{ \begin{array}{l} \text{множество десятичных дробей из интервала } (0,1), \\ \text{в записи которых после запятой присутствуют лишь } 0 \text{ и } 1 \end{array} \right\}$

3. Найдите верхний и нижний предел числовых последовательностей.

а. $x_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}}$ б. $x_n = \cos^n \frac{2\pi n}{3}$

4. Пользуясь критерием Коши, докажите сходимость последовательности $x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\cos n!}{n \cdot (n+1)}$.

5. Запишите на языке « $\varepsilon - \delta$ ».

а. $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \neq -2 \Leftrightarrow$

б. $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow$

в. $\nexists \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \Leftrightarrow$

г. $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = -2 \Leftrightarrow$

д. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 + 0 \Leftrightarrow$

6. Вычислите следующие пределы функций, используя эквивалентные.

а. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$ б. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin px - \cos px}$ в. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}$ г. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$

д. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)}$ е. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(\pi \cdot 2^x)}{\ln \cos(\pi \cdot 2^x)}$ ж. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} \right)^{1/x}$ з. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{(a^x - b^x)^2}$

7. Вычислите производные функций.

а. $y = (\sin(x^3))^{\arcsin(\sqrt{2x-x^2+x})}$; б. $y = x|x|$; в. $y = \frac{x^2}{1-x} \sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$;

г. найдите дифференциал 10-го порядка функции $y = \sin x \sin 2x \sin 3x$.

8. Напишите разложение по целым неотрицательным степеням переменной x до членов указанного порядка включительно.

а. $\sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2}$ до члена с x^3 ;

б. $\sin(\sin x)$ до члена с x^3 ;

в. $\operatorname{tg} x$ до члена с x^5 .

9. Функцию $f(x) = x^x - 1$ разложить по целым неотрицательным степеням бинома $x - 1$ до члена $(x - 1)^3$.

10. Вычислите пределы с помощью формулы Тейлора.

а. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - x^3 \sqrt{1-x^2}}{x^5}$ б. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}$ в. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{1/x} - \sqrt{x^6 + 1} \right)$

11. С помощью определенных интегралов вычислите предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right)$.

12. Найдите $\frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt$.

13. Вычислите интегралы.

а. $\int_1^2 (2x+3) \arccos(2x-3) dx$ б. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ в. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$ г. $\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx$ д. $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx$ ($a > 0$)
е. *v. p.* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx$ ж. *v. p.* $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2}$

14. Исследуйте абсолютную и условную сходимость интегралов:

а. $\int_0^{+\infty} \frac{x^m \arctg x}{2+x^n} dx$ б. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$ в. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x+100} dx$ г. $\int_2^{+\infty} \frac{\sin^3 x dx}{x^p \ln x}$ д. $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{\cos x}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$

15. Исследуйте абсолютную и условную сходимость числовых рядов.

а. $\sum \ln^p \left(\sec \frac{\pi}{n}\right)$ б. $\left(\sum \operatorname{ctg} \frac{\pi n}{4n-2} - \sin \frac{\pi n}{2n+1}\right)$ в. $\sum \left(\cos \frac{a}{n}\right)^{n^2}$ г. $\sum (-1)^n \frac{((n+1)!)^n}{2!4!\dots(2n)!}$
д. $\sum \frac{\ln^{100} n}{n} \sin \frac{\pi n}{4}$ е. $\sum \frac{\sin \frac{\pi n}{4}}{n^p + \sin \frac{\pi n}{4}}$ ж. $\sum \frac{(-1)^n}{(\sqrt{n} + (-1)^n)^p}$

16. Исследуйте равномерную сходимость последовательности функций. Выделите наибольшее множество равномерной сходимости.

а. $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$ ($x \geq 0$) б. $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ ($x \in \mathbb{R}$)

17. Исследуйте равномерную сходимость функциональных рядов.

а. $\sum (1-x)x^n$ ($x \in [0; 1]$) б. $\sum \frac{nx}{1+n^5x^2}$ ($x \in \mathbb{R}$) в. $\sum \ln\left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n}\right)$ $|x| < a$ г. $\sum \frac{(-1)^n}{x+n}$ ($x > 0$)
д. $\sum \frac{\cos \frac{2\pi n}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}$ ($x \in \mathbb{R}$) е. $\sum \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}$ ($x \geq 0$)

18. Определите область существования и непрерывности функции $f(x) = \sum \frac{x+n(-1)^n}{x^2+n^2}$.

19. Определите радиус и интервал сходимости степенного ряда и исследуйте поведение в граничных точках интервала сходимости.

а. $\sum \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$ б. $\sum \frac{(1+2 \cos \frac{n\pi}{4})^n}{\ln n} x^{2n+1}$

20. Применяя различные методы теории степенных рядов, разложите функции в ряд Маклорена относительно x . Найдите радиус полученного разложения.

а. $\operatorname{arctg} \frac{2x}{2-x^2}$ б. $e^x \cos x$ в. $\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}$ (первые 3 члена разложения)

21. Применяя различные методы теории степенных рядов, вычислите суммы рядов.

а. $\sum \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n$ б. $\sum n(n+1) x^n$ в. $\sum \frac{\sin nx}{n}$

22. Вычислите приближенно, используя степенные ряды.

а. $\operatorname{tg} 9^\circ$ с точностью до 10^{-3} б. $\int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx$ с точностью до 10^{-3}

23. Вычислите интегралы, используя интегралы Дирихле, Эйлера-Пуассона, Лапласа, Френеля, Г-, В-функции.

а. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 ax}{x} dx$ б. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx$ в. $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^2 + 2bx + c) dx$ г. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \operatorname{ch} bx dx$ ($a > 0$)
д. $\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx$ е. $\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx$ ($n > 0$) ж. $\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^p dx$