Примеры задач по курсу "Линейная алгебра"

Задание 1

Вычислите значение выражения и приведите его к алгебраической, тригонометрической или экспоненциальной форме комплексного числа:

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2i}\right)^2 + \frac{1}{4}\left((e^{i\phi})^2 + (e^{-i\phi})^2\right).$$

Задание 2

Найти базис суммы и пересечения двух подпространств L_1 и L_2 пространства $\mathbb{R}^4$, являющихся линейными оболочками следующих векторов:

$$L_1 : \quad x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad L_2 : \quad y_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Задание 3

Три грани параллелепипеда лежат в плоскостях $x - 3z + 18 = 0$, $2x - 4y + 5z - 21 = 0$, $6x + y + z - 30 = 0$, а одна из его вершин A имеет координаты $(-1, 3, 1)$. Составить уравнения остальных граней параллелепипеда и его диагонали, проходящей через вершину A.

Задание 4

Компоненты тензора $\tau \in T_3^0(X)$ заданы в некотором базисе пространства $X = \mathbb{R}^3$ матрицей A. Вычислить матрицу компонент транспонированного тензора $\tau_{ijk} \to \tau_{jki}$, а также матрицы симметризованного $\tau_{(ijk)}$ и антисимметризованного $\tau_{[ijk]}$ тензоров, если:

$$A = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 3 & 2 & 5 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 4 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right\|.$$

.

Задание 5

Найти собственные функции и собственные значения линейнойго оператора $\phi : \mathbb{R}[x, y]_2 \to \mathbb{R}[x, y]_2$ в пространстве полиномов от двух переменных x и y степени не выше $n = 2$ вида

$$p(x, y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2.$$

При этом действие оператора ϕ на элемент $p(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]_2$ задано формулой:

$$[\phi p](x, y) = p(x + 1, y - 2).$$

Задание 6

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}[x]_3$ многочленов степени не выше $n = 3$ со скалярным произведением

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt,$$

построить ортогональный базис, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $\{1, t, t^2, t^3\}$.

Задание 7

Подпространство L евклидова пространства $X_E(\mathbb{R})$ задано системой линейных уравнений:

$$\begin{cases} \xi^1 + \xi^2 + \xi^3 - \xi^4 = 0, \\ 2\xi^1 + \xi^2 + 3\xi^3 = 0, \\ 4\xi^1 + 3\xi^2 + 5\xi^3 - 2\xi^4 = 0. \end{cases}$$

Найти ортогональную проекцию y и ортогональную составляющую z вектора x относительно L, если $x = (2, 3, -1, -2)^T$.